Метод адаптивной искусственной вязкости

И.В. Фрязинов, И.В. Попов
Институт математического моделирования РАН

Уравнения газовой динамики

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho \mathrm{v})=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathrm{v})+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \mathrm{v}^2+\mathrm{p}\right)=0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(E+\mathrm{p}\right)\mathrm{v}\right)=0$$

$$\mathrm{p}=\left(\gamma-1\right)\rho\varepsilon,\ E=\rho\varepsilon+\rho\frac{\mathrm{v}^2}{2}$$

ρ -плотность, I - импульс $\left(I=\rho \mathrm{v}\right)$, E - полная энергия

$$\mathrm{v}=\frac{I}{\rho},\ p=\left(\gamma-1\right)\left(E-\rho\frac{\mathrm{v}^2}{2}\right)$$

<u>Схема Лакса-Вендроффа</u>

$$t_n,\, t_{n+1}=t_n+\tau_n$$

$$\rho^{n+1}= \quad \rho^n + \qquad \tau_n\frac{\partial\rho^n}{\partial t}+ \qquad \frac{\tau_n^2}{2}\frac{\partial^2\rho^n}{\partial t^2}+\cdots$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$$\frac{\partial\rho^n}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(\rho\mathrm{v})^n \rightarrow \qquad \frac{\partial^2\rho^n}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathrm{v})^n$$

$$\uparrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathrm{v})+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\mathrm{v}^2+\mathrm{p}\right)=0$$

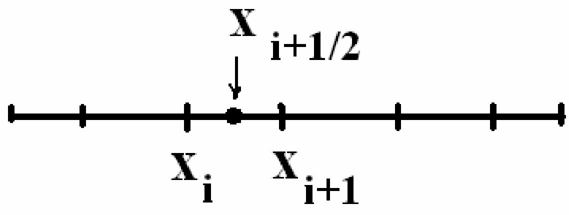
$$\frac{\rho^{n+1}-\rho^n}{\tau_n}+\frac{\partial W_\rho^n}{\partial x}=0,\quad W_\rho^n=(\rho\mathrm{v})^n-\frac{\tau_n}{2}LW_\rho^n,$$

$$LW_\rho^n=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\rho\mathrm{v}^2\right)^n+\mathrm{p}^n\right)$$ - поправка Лакса-Вендроффа

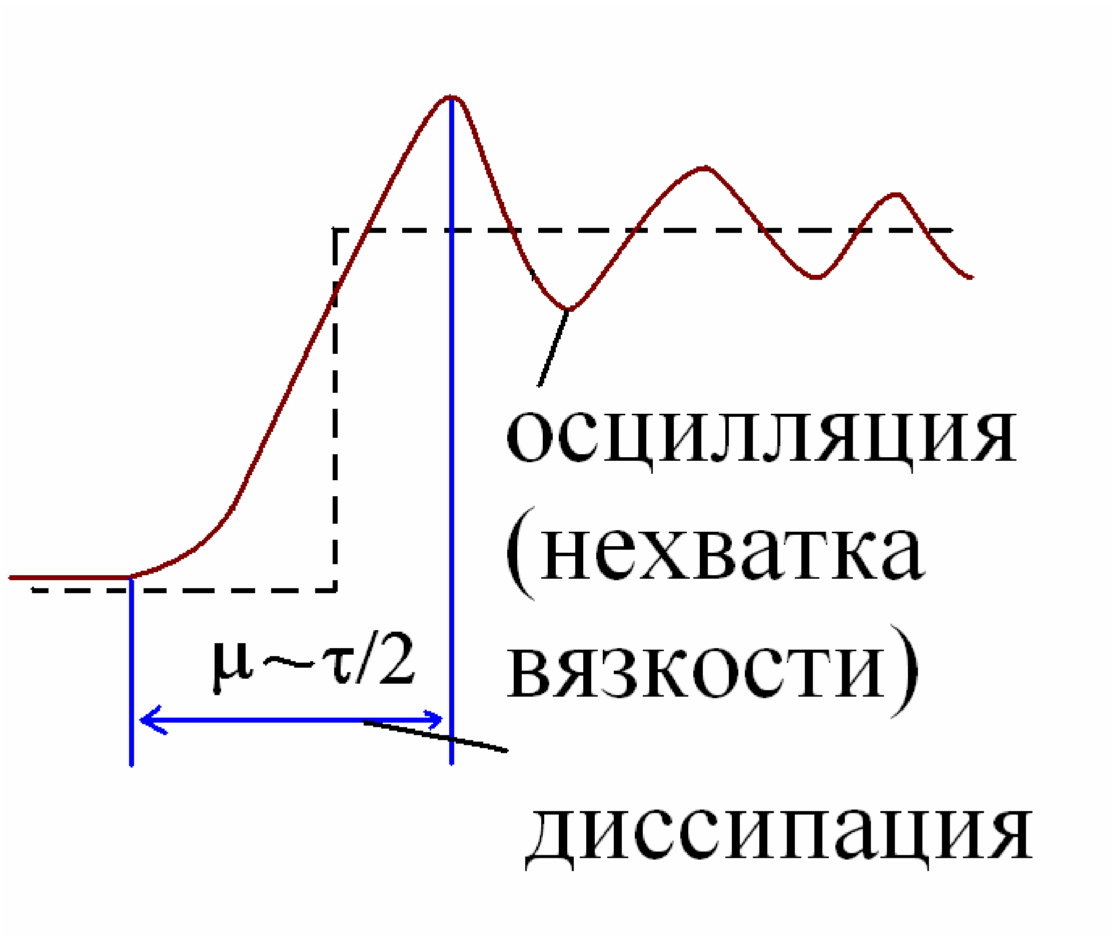
$$W_I,\quad LW_I,\quad W_E,\quad LW_E$$

$$\frac{q_i^{n+1}-q_i^n}{\tau_n}+\frac{W^n_{q\,i+1/2}-W^n_{q\,i+1/2}}{h}=0$$ - схема Лакса-Вендроффа,

$$q=\rho, I, E$$



$$\mathbf{h=x_{i+1}-x_i}$$



$$\frac{q_i^{n+1}-q_i^n}{\tau_n}+\frac{W^n_{q\,i+1/2}-W^n_{q\,i+1/2}}{h}=\left(\mu^{n+1}q^n_{\bar{x}}\right)_{x\,i},$$

где $\mu^{n+1}_{i+1/2}$ - искусственная вязкость.

Построение искусственной вязкости из условия принципа максимума

1. Пусть $\mathrm{v}=\mathrm{v}_0$, $\mathrm{p}=\mathrm{p}_0$, $\mathrm{v}_0, \mathrm{p}_0$ - постоянные

$$\rho^n_{t\,i}+\mathrm{v}_0\,\rho^n_{\overset{o}{x}\,i}=\left(\mu^{n+1}\rho^n_{\bar{x}}\right)_{x\,i}$$

Уравнения для I и E получаются умножением предыдущего уравнения на v_0 и $\frac{\mathrm{v}_0^2}{2}$. Отсюда следует, что вязкость μ должна быть одна и та же во всех уравнениях.

2. Для построения μ^{n+1} воспользуемся уравнением неразрывности

$$\frac{\rho_i^{n+1}-\rho_i^n}{\tau_n}+\frac{W^n_{i+1/2}-W^n_{q\,i+1/2}}{h}=\left(\mu^{n+1}q^n_{\bar{x}}\right)_{x\,i}$$

$$W^n_{\rho\,i+1/2}=\frac{\rho^n_{i+1}+\rho^n_i}{2}\,\frac{\mathrm{v}^n_{i+1}+\mathrm{v}^n_i}{2}-$$

$$-\frac{\tau_n}{2}\left[\frac{\left(\rho_{i+1}\mathrm{v}^2_{i+1}\right)^n-\left(\rho_i\mathrm{v}^2_i\right)^n}{h}+\frac{\mathrm{p}_{i+1}-\mathrm{p}_i}{h}\right]$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$

поправка Лакса – Вендроффа $\quad \frac{\mathrm{p}_{i+1}-\mathrm{p}_i}{h}\equiv c^2_{i+1/2}\frac{\rho_{i+1}-\rho_i}{h}+\alpha_{i+1/2}\frac{S_{i-1}-S_i}{h}$

,где

$$c^2_{i+1/2}\equiv\left[\frac{\mathrm{p}\left(\rho_{i+1},S_{i+1}\right)+\mathrm{p}\left(\rho_{i+1},S_i\right)}{2}-\frac{\mathrm{p}\left(\rho_i,S_{i+1}\right)+\mathrm{p}\left(\rho_i,S_i\right)}{2}\right]\Big/\left(\rho_{i+1}-\rho_i\right)$$

$$\alpha_{i+1}\equiv\left[\frac{\mathrm{p}\left(\rho_{i+1},S_{i+1}\right)+\mathrm{p}\left(\rho_i,S_{i+1}\right)}{2}-\frac{\mathrm{p}\left(\rho_{i+1},S_i\right)+\mathrm{p}\left(\rho_i,S_i\right)}{2}\right]\Big/\left(S_{i+1}-S_i\right)$$

Подставляем p_x в поправку Лакса-Вендроффа, собираем все слагаемые при $\rho_{i+1}^n, \rho_i^n, \rho_{i-1}^n$, замораживаем $c^2, \alpha, \mu, \mathrm{v}, \mathrm{v}^2$, перенемем $\alpha S_{\bar{x}x_i}$ в правую часть уравнения. Получаем

$$\rho_i^{n+1} = A\rho_{i+1}^n + C\rho_{i-1}^n + (1-B)\rho_i^n + \tau_n F_i^n$$

$$A = -\frac{\tau_n \mathrm{v}}{2h} + \frac{\tau_n}{h^2}\left(\mu + \frac{\tau_n}{2}\left(\mathrm{v}^2 + c^2\right)\right)$$

$$C = \frac{\tau_n \mathrm{v}}{2h} + \frac{\tau_n}{h^2}\left(\mu + \frac{\tau_n}{2}\left(\mathrm{v}^2 + c^2\right)\right)$$

$$B = A + C$$

$$F = \alpha S_{x\bar{x}\,i}^n$$

<u>Принцип максимума</u>

$$A > 0, \quad C > 0, \quad B < 1$$

A и C будут положительными, если

$$-\frac{\tau_n |\mathrm{v}|}{2h} + \frac{\tau_n}{h^2}\left(\mu + \frac{\tau_n}{2}\left(\mathrm{v}^2 + c^2\right)\right) > 0$$

и

$$\frac{h|\mathrm{v}|}{2} - \frac{\tau_n}{2}\left(\mathrm{v}^2 + c^2\right) < \mu$$

Коэффициент B будет меньше 1, если

$$\mu < \frac{h^2}{2\tau}\left(1 - \left(\frac{\tau_n}{h}\sqrt{\mathrm{v}^2 + c^2}\right)^2\right)$$

Поскольку μ должно быть положительным, то должно быть

$$\frac{\tau}{h}\sqrt{\mathrm{v}^2 + c^2} < 1 \text{ и } \frac{h}{\tau} > \sqrt{\mathrm{v}^2 + c^2}$$

Все условия будут выполнены, если

$$\mu_{\min}=\frac{h|\mathrm{v}|}{2}\left(1-\frac{\tau_n}{h}\sqrt{\mathrm{v}^2+c^2}\right)<\mu<\frac{h}{2}\sqrt{\mathrm{v}^2+c^2}\left(1-\left(\frac{\tau_n}{h}\sqrt{\mathrm{v}^2+c^2}\right)^2\right)=\mu_{\max}$$

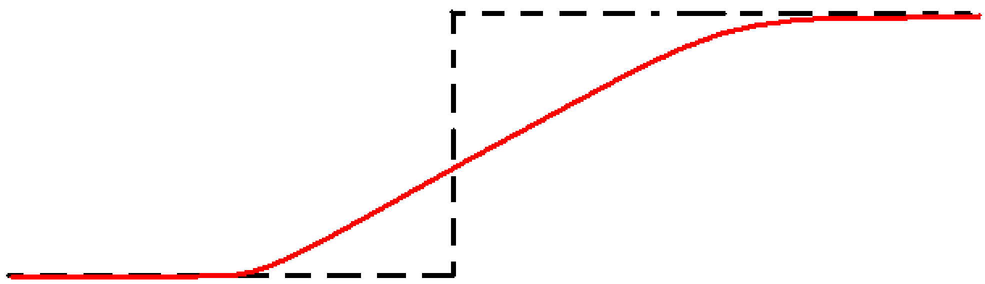
$$\mu_{\min}{}^{n}_{i+1/2}=\frac{h_{i+1/2}}{2}\left|\mathrm{v}_{i+1/2}\right|\left(1-\frac{\tau_n}{h_{i+1/2}}\sqrt{\mathrm{v}^2_{i+1/2}+c^2_{i+1/2}}\right)$$

$$\mu_{\max}{}^{n}_{i+1/2}=\frac{h_{i+1/2}}{2}\sqrt{\mathrm{v}^2_{i+1/2}+c^2_{i+1/2}}\left(1-\left(\frac{\tau_n}{h_{i+1/2}}\sqrt{\mathrm{v}^2_{i+1/2}+c^2_{i+1/2}}\right)^2\right),$$

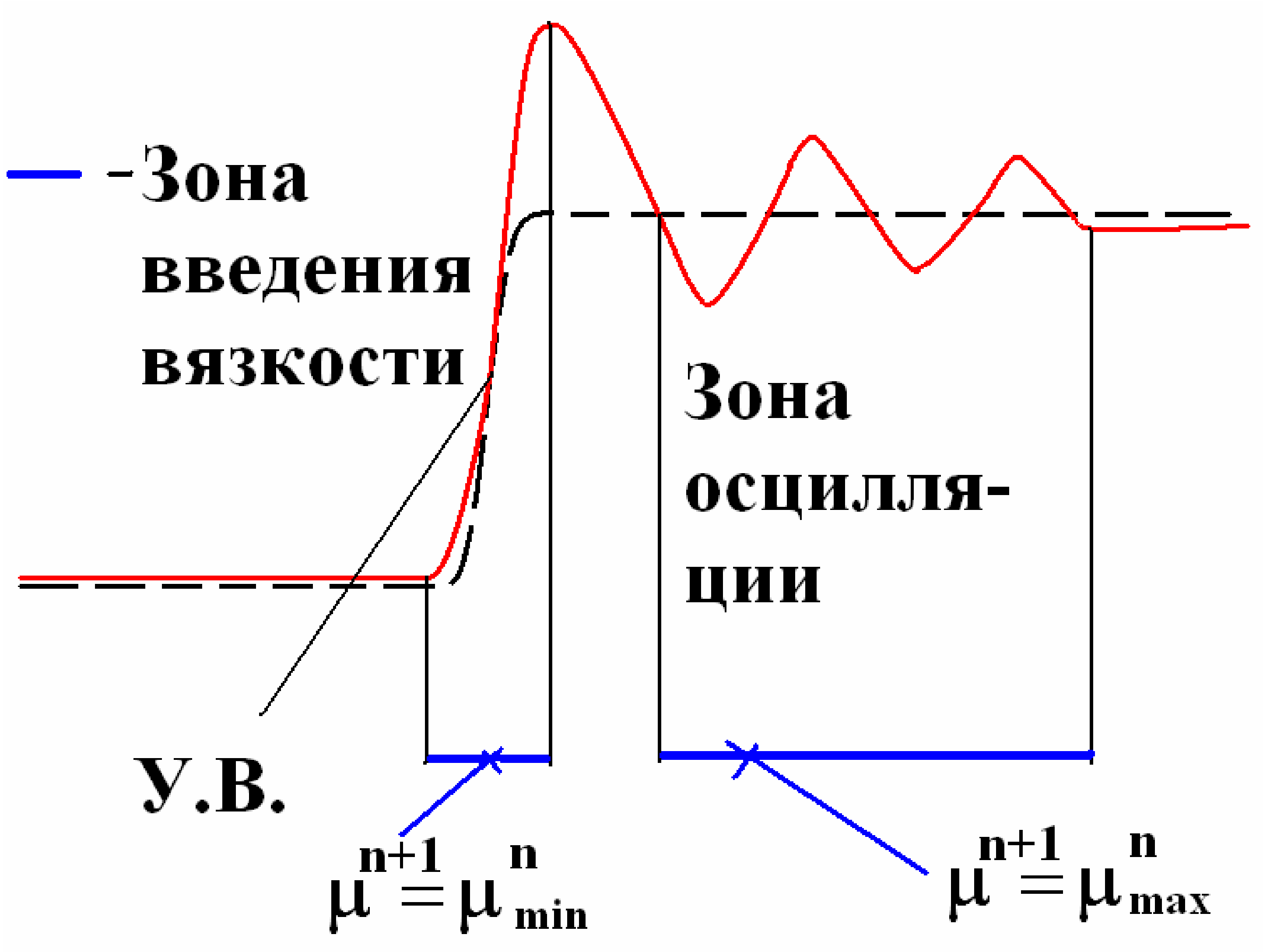
$$\mathrm{v}_{i+1/2}=\frac{\mathrm{v}_{i+1}+\mathrm{v}_i}{2},\quad c^2_{i+1/2}=\gamma\left|\frac{\mathrm{p}_{i+1}+\mathrm{p}_i}{\rho_{i+1}+\rho_i}\right|$$

$$\tau_n\max_i\frac{1}{h_{i+1/2}}\sqrt{\left(\mathrm{v}^n_{i+1/2}\right)^2+\left(c^n_{i+1/2}\right)^2}=Ku<1,\qquad t_{n+1}=t_n+\tau_n$$

Если везде включить вязкость, то происходит сильное размывание разрывов



Область введения искусственной вязкости



Вводится вязкость на У.В. и на осцилляциях, не вводится на К.Р. и В.Р.

$$\mathrm{p} = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x} = (\gamma - 1)\left(\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right) = (\gamma - 1)\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{p}}{\rho}\right)$$

Если $\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{p}}{\rho}\right)$ имеют противоположные знаки, то $x \in KP$, иначе $x \in YB$ или $x \in BP$

	К.Р.	В.Р.	У.В.
1D	$K.P.:\to \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{p}}{\rho}\right)\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}<0$	$B.P.:\to \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}>0$	$У.В.:\to \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}<0$
2D 3D	$\vec{\ell}=\frac{\nabla\rho}{\lvert\nabla\rho\rvert};\ \frac{\partial}{\partial\vec{\ell}}\left(\frac{\mathrm{p}}{\rho}\right)<0$	$\frac{\partial \mathrm{v}_{\ell}}{\partial\vec{\ell}}>0\quad\left(\mathrm{v}_{\ell}<0\right)$	$\frac{\partial \mathrm{v}_{\ell}}{\partial\vec{\ell}}<0\quad\left(\mathrm{v}_{\ell}<0\right)$
	на У.В. и В.Р. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{p}}{\rho}\right)\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}>0\ \left(1D\right)$ *и* $\frac{\partial}{\partial\vec{\ell}}\left(\frac{\mathrm{p}}{\rho}\right)>0\ \left(2D,3D\right)$ Все три неравенства 1D, 2D и 3D можно записать, используя производные по направлению $\vec{\ell}=\frac{\nabla\rho}{\lvert\nabla\rho\rvert}$		

$$\tilde{q}^{n+1}=\tilde{\rho}^{n+1},\tilde{I}^{n+1},\tilde{E}^{n+1},\quad \text{"}Предиктор\text{"}$$

$$\tilde{\mathrm{v}}^{n+1}=\tilde{I}^{n+1}\Big/\tilde{\rho}^{n+1},\qquad \tilde{\mathrm{p}}^{n+1}=\left(\gamma-1\right)\left(\tilde{E}^{n+1}-\tilde{\rho}^{n+1}\frac{\left(\tilde{\mathrm{v}}^{n+1}\right)^{2}}{2}\right)$$

$$Do \quad i=1,N-1$$

$$\mu^{n+1}_{i+1/2}=0$$

$$if\left(\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right)^{n+1}_{x\,i+1/2}\tilde{\rho}^{n+1}_{x\,i+1/2}>0\right) then \qquad \left|\left(x_{i+1/2}\notin К.Р.\right)\right.$$

$$if\left(\tilde{v}^{n+1}_{x\,i+1/2}<0\right) \quad then \qquad \left|\left(x_{i+1/2}\notin В.Р.\right)\right.$$

$$\mu^{n+1}_{i+1/2}=\mu_{\min}{}^{n}_{i+1/2} \qquad \left|\left(x_{i+1/2}\notin К.Р.,\ В.Р.\right)\right.$$

$$endif$$

$$endif$$

$$enddo \qquad \left|дополнительно\ 6\ операций\ на\ точку\right.$$

$$Do \quad i=2,N-1$$

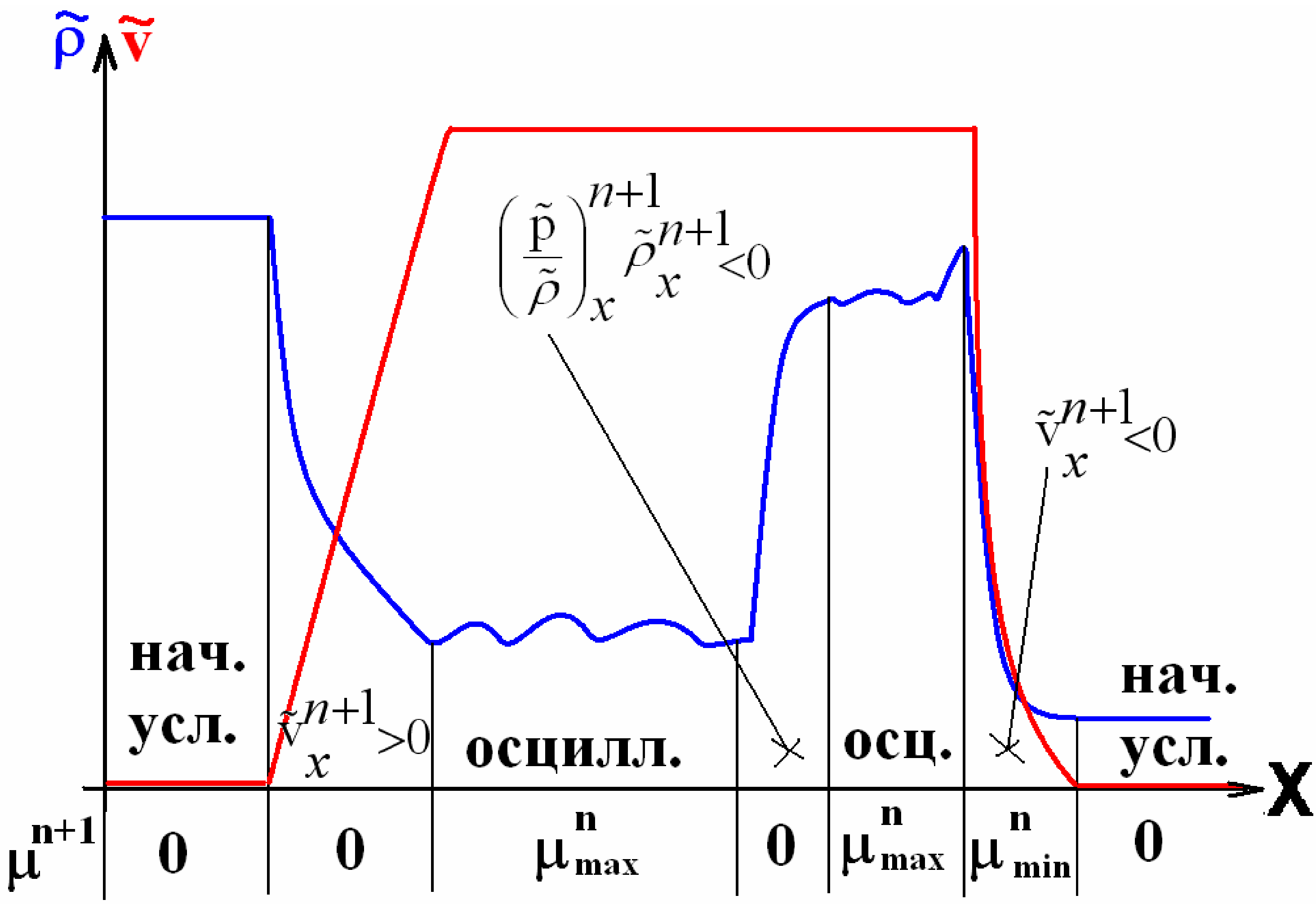
$$if\left(\tilde{\rho}^{n+1}_{x\,i+1/2}\tilde{\rho}^{n+1}_{\bar{x}\,i-1/2}<0\right) then \qquad \left|x_{i+1/2}\in осцилляции\right.$$

$$\mu^{n+1}_{i+1/2}=\mu_{\max}{}^{n}_{i+1/2}$$

$$\mu^{n+1}_{i-1/2}=\mu_{\max}{}^{n}_{i-1/2}$$

$$endif$$

$$enddo$$



Диссипативные искусственные слагаемые

$$\left(\mu^{n+1} q_{\overline{x}}^{n}\right)_{x\,i} = \frac{1}{h}\left(\mu_{i+1/2}^{n+1}\frac{q_{i+1}^{n}-q_{i}^{n}}{h} - \mu_{i-1/2}^{n+1}\frac{q_{i}^{n}-q_{i-1}^{n}}{h}\right), \quad q=\rho, I, E$$

Алгоритм

$$\frac{q_i^{n+1}-q_i^n}{\tau_n}+\underline{\frac{W^n_{q\,i+1/2}-W^n_{q\,i+1/2}}{h}}=\underline{\underline{\left(\mu^{n+1}q^n_{\bar{x}}\right)_{xi}}},\quad q=\rho, I, E$$

1 Этап. **Предиктор** (Лакс-Вендрофф)

$$\frac{\tilde{q}_i^{n+1}-q_i^n}{\tau_n}+\underline{\frac{W^n_{q\,i+1/2}-W^n_{q\,i+1/2}}{h}}=0,\quad \tilde{q}=\tilde{\rho}, \tilde{I}, \tilde{E}$$

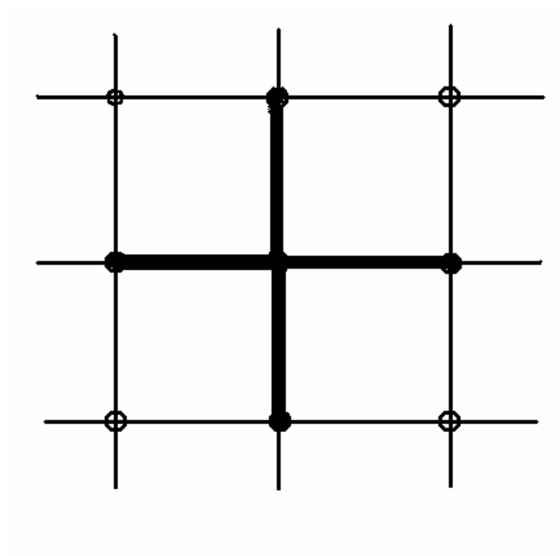
2 Этап. **Введение искусственной вязкости**

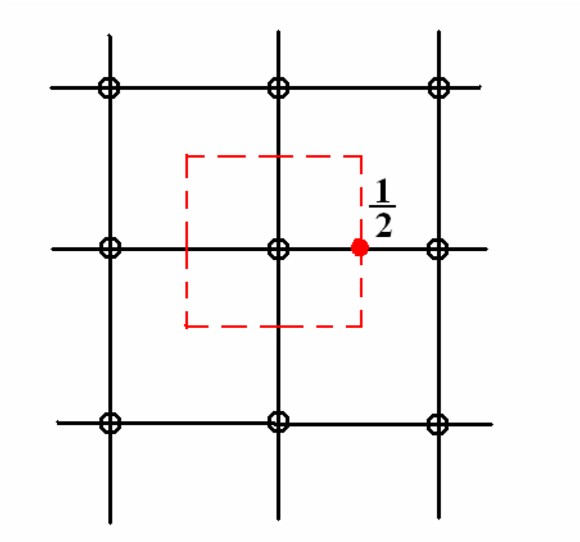
$$\mu^{n+1}_{i+1/2}=\begin{cases}\mu_{\min}{}^{n}_{i+1/2}, & \text{на У.В.}\\ \mu_{\max}{}^{n}_{i+1/2}, & \text{на осцилляциях}\\ 0, & \text{на К.Р. и В.Р.}\end{cases}$$

3 Этап. **Корректор**

$$\frac{q_i^{n+1}-\tilde{q}_i^{n+1}}{\tau_n}=\underline{\underline{\left(\mu^{n+1}q^n_{\bar{x}}\right)_{xi}}},\quad q=\rho, I, E$$

Два измерения



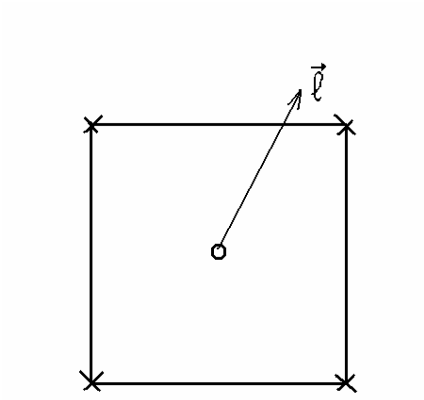


$$\mu_1^{n+1} \qquad \mu_2^{n+1}$$

$$\uparrow \qquad \uparrow$$

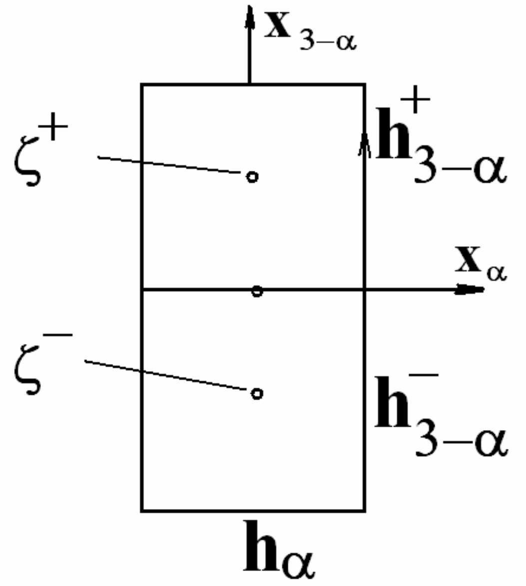
$$v_1 \qquad v_2$$

$$\sum_{\alpha} B_{\alpha} < 1 \quad \rightarrow \quad Ku < \begin{cases} 0.4, & D = 2 \\ 0.3, & D = 3 \end{cases}$$



$$\vec{\ell} = \left(\frac{\bar{\tilde{\rho}}_{x_1}}{\sqrt{\bar{\tilde{\rho}}_{x_1}^2 + \bar{\tilde{\rho}}_{x_2}^2}}, \frac{\bar{\tilde{\rho}}_{x_2}}{\sqrt{\bar{\tilde{\rho}}_{x_1}^2 + \bar{\tilde{\rho}}_{x_2}^2}} \right)$$

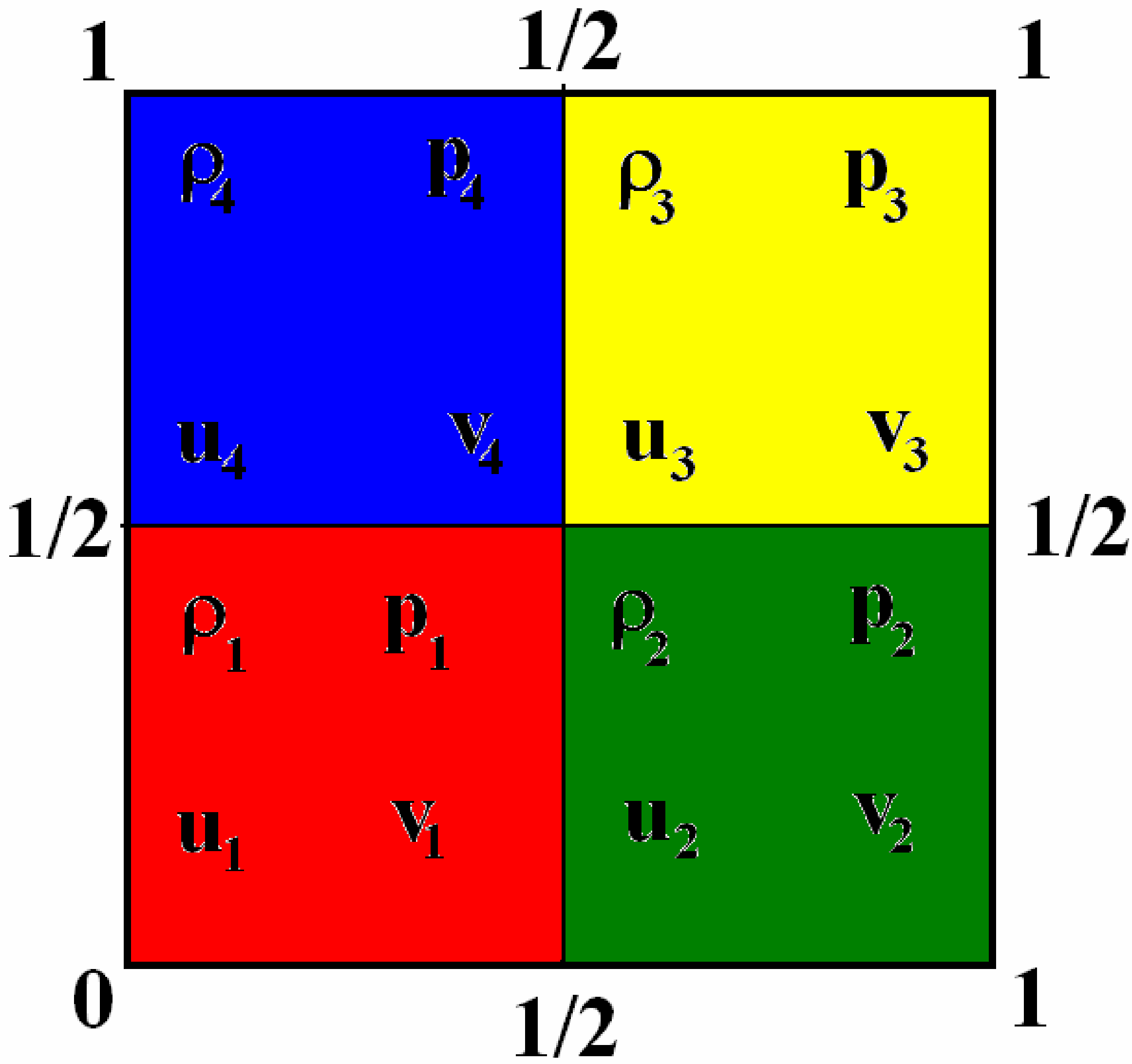
$$
\begin{aligned}
&\varsigma=0\\
&if\quad \left(\frac{\partial}{\partial\vec{\ell}}\left(\frac{\tilde{\mathrm{p}}}{\tilde{\rho}}\right)>0\right)\quad then\\
&if\quad \left(\frac{\partial\tilde{\mathrm{v}}_{\ell}}{\partial\vec{\ell}}<0\right)\quad then\\
&\qquad\qquad \varsigma=1\\
&endif\\
&endif
\end{aligned}
$$



$$
\mu^{n+1}_{\alpha\, i_\alpha+1/2}=\frac{0.5h^{-}_{3-\alpha}\varsigma^{-}+0.5h^{+}_{3-\alpha}\varsigma^{+}}{\hbar_{3-\alpha}}\mu_{\min}{}^{n}_{\alpha\, i_\alpha+1/2}
$$

$$
\begin{cases}
\varsigma^{+}=\varsigma^{-}=0\\
\mu^{n+1}_{\alpha}=\mu_{\max}{}^{n}_{\alpha}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\hbar_{3-\alpha}\mu^{n+1}_{\alpha}q^{n}_{x_\alpha}-\textit{вязкий поток через }\hbar_{3-\alpha}\\
\left(0.5h^{+}_{3-\alpha}+0.5h^{-}_{3-\alpha}\right)W^{n}_{q\,\alpha}-\textit{поток величины }q
\end{cases}
$$


1
1/2
1
ρ4 p4
ρ3 p3
u4 v4
u3 v3
1/2
1/2
ρ1 p1
ρ2 p2
u1 v1
u2 v2
0
1/2
1