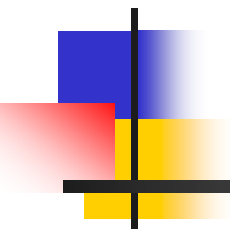
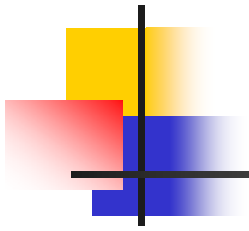


***Критерии устойчивости
некоторых квазилинейных
сингулярно возмущенных
модельных задач и их
приложения***



***Ю.А.Коняев, В.И.Безяев
Российский Университет дружбы народов***

Дубна, ММСР 2009

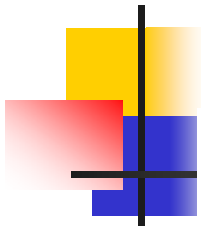


***Criteria of the stability
for some quasilinear singular
perturbated model problems and
their applications***

***Yu.A. Konyaev and V.I. Bezyaev
Peoples Friendship University of Russia***

Dubna, MMCP 2009

Сингулярно возмущенные задачи



Анализ некоторых классов прикладных задач с быстрыми и медленными переменными, например задачи о прохождении нервного импульса [1, с.212], приводит к изучению так называемых сингулярно возмущенных (с/в) квазилинейных задач вида

$$\varepsilon \dot{x} = A(t, \varepsilon)x + \varepsilon f(x, t), \quad x(0, \varepsilon) = x^0, \quad x \in C^m, \quad f(0, t) \equiv 0 \quad (1)$$

(в общем случае могут иметь место и регулярные возмущения), где матричный ряд

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \varepsilon^k \quad (2)$$

сходится абсолютно и равномерно по некоторой норме при $|\varepsilon| < E_0 \leq 1$ и $t \geq 0$.

Сингулярность в данном случае, связанная с наличием ε перед \dot{x} , может приводить к появлению так называемого погранслоя в окрестности $t = 0$.

Автономные матрицы. Теорема 1

Сформулируем основные результаты для с/в системы (1) с **постоянными** матрицами A_k ($k \geq 0$).

Теорема 1. Собственные значения $\{\lambda_j(\varepsilon)\}_1^n$ и собственные векторы $\{s_j(\varepsilon)\}_1^n$ регулярно возмущенной матрицы $A(\varepsilon)$ при наличии простого спектра $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ ($\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq 0$, $j \neq k$, $j, k = \overline{1, n}$) матрицы A_0 могут быть вычислены одновременно и с любой точностью

$$\lambda_j(\varepsilon) = \sum_{k=0}^N \lambda_{kj} \varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1}), \quad s_j(\varepsilon) = \sum_{k=0}^N s_{kj} \varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1}) \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (3)$$

с помощью простого конструктивного итерационного алгоритма метода расщепления [9]

Доказательство. Запишем соотношения $A(\varepsilon)s_j(\varepsilon) = \lambda_j(\varepsilon)s_j(\varepsilon)$ в матричной форме $A(\varepsilon)S(\varepsilon) = S(\varepsilon)\Lambda(\varepsilon)$, где диагональная матрица $\Lambda(\varepsilon) = \text{diag}\{\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_n(\varepsilon)\}$ состоит из искомых собственных значений $\lambda_j(\varepsilon)$, а матрица $S(\varepsilon)$ состоит из собственных вектор-столбцов $s_j(\varepsilon)$ ($j = \overline{1, n}$). В условиях теоремы 1 всегда существует невырожденная матрица S_0 такая, что

$$S_0^{-1}A_0S_0 = \Lambda_0 = \text{diag}\{\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0n}\}.$$

После замены $S(\varepsilon) = S_0H(\varepsilon)$ получим матричное уравнение

$$B(\varepsilon)H(\varepsilon) = H(\varepsilon)\Lambda(\varepsilon) \quad (B(\varepsilon) = S_0^{-1}A(\varepsilon)S_0, \quad B(0) = \Lambda_0). \quad (4)$$

0 методе расщепления. Теорема 1

Для произвольной квадратной матрицы C введем обозначения для ее диагональной $\bar{C} = \text{diag}\{c_{11}, \dots, c_{nn}\}$ и "бездиагональной" $\bar{\bar{C}} = C - \bar{C}$ частей. Асимптотическое решение задачи (2) будем искать с использованием аппарата диагональных и "бездиагональных" матриц в виде

$$\Lambda(\varepsilon) = \sum_{k=0}^N \Lambda_k \varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1}), \quad H(\varepsilon) = H_{(N)}(\varepsilon) = E + \sum_{k=1}^N \bar{\bar{H}}_k \varepsilon^k. \quad (5)$$

Приравнивая в (4) коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим набор простых однотипных матричных уравнений:

$$\Lambda_0 \bar{\bar{H}}_k - \bar{\bar{H}}_k \Lambda_0 = \Lambda_k - P_k \quad (k = \overline{1, N}),$$

$$P_1 = B_1, \quad P_k = B_k + \sum_{j=1}^{k-1} (B_j \bar{\bar{H}}_{k-j} - \bar{\bar{H}}_{k-j} \Lambda_j) = \{p_{ij}\}_k \quad (k \geq 2)$$

при последовательном решении которых однозначно определяются все диагональные Λ_k и «бездиагональные» $\bar{\bar{H}}_k$ ($k = \overline{1, N}$) матрицы:

$$\Lambda_k = \bar{P}_k, \quad \bar{\bar{H}}_k = \{h_{ij}\}_k, \quad (h_{ij})_k = \sigma_{ij}^{-1}(p_{ij})_k \quad (i, j = \overline{1, n}, i \neq j, k \geq 1).$$

Справедливость представления (3) и (5) следует из сходимости матричного ряда $A(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varepsilon^k$ и указанного итерационного процесса, что и завершает доказательство теоремы 1, при этом усеченная матрица $S_{(N)}(\varepsilon) = S_0 H_{(N)}(\varepsilon)$ состоит из усеченных собственных векторов $s_{j(N)}(\varepsilon)$ матрицы $A(\varepsilon)$.

Пример 1. Асимптотика собственных значений и собственных векторов

Пример 1.

Пусть $A(\varepsilon) = A_0 + A_1\varepsilon$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\lambda_1(\varepsilon) = \lambda_{01} + \varepsilon\lambda_{11} + O(\varepsilon^2) = 1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$\lambda_2(\varepsilon) = \lambda_{02} + \varepsilon\lambda_{12} + O(\varepsilon^2) = 2 + 4\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$s_1(\varepsilon) = s_{01} + \varepsilon s_{11} + O(\varepsilon^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2),$$

$$s_2(\varepsilon) = s_{02} + \varepsilon s_{12} + O(\varepsilon^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2),$$

0 пограничном слое. Теорема 2

Теорема 2. Если матрица A_0 имеет только простые точки спектра, тогда с/в квазилинейная система

$$\varepsilon \dot{x} = A(\varepsilon)x + \varepsilon f(x, t), \quad x(0, \varepsilon) = x^0, \quad f(0, t) \equiv 0 \quad (0 < \varepsilon < 1) \quad (6)$$

с помощью невырожденной при достаточно малых $\varepsilon > 0$ замены $x = S_{(N)}(\varepsilon)z$ может быть приведена к системе с почти диагональной матрицей:

$$\varepsilon \dot{z} = Q(\varepsilon)z + \varepsilon b(z, t, \varepsilon), \quad z(0, \varepsilon) = z^0, \quad b(0, t, \varepsilon) \equiv 0, \quad (7)$$

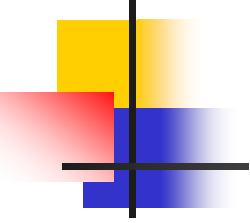
$$Q(\varepsilon) = \sum_{k=0}^N \Lambda_k \varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1}) \quad (N \geq 1, \varepsilon \rightarrow +0),$$

а в случае, если спектр $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ матрицы A_0 удовлетворяет неравенствам $Re \lambda_{0j} \leq 0 \quad (j = \overline{1, n})$, асимптотическое представление решения на отрезке $[0, T_0]$ соответствующей с/в однородной ($f \equiv 0$) системы $\dot{x} = A(\varepsilon)x$ может быть записано в виде:

$$x(t, \varepsilon) = S_0(E + \sum_{k=1}^N H_k \varepsilon^k) \exp(\varepsilon^{-1} \int_0^t \sum_{k=0}^N \Lambda_k \varepsilon^k ds) (E + O(\varepsilon^{N+1})) C, \quad (8)$$

где структура экспоненциального пограничного слоя в окрестности точки $t = 0$ полностью определяется функцией $\exp(\varepsilon^{-1} \int_0^t \Lambda_0 ds)$.

Об устойчивости. Теорема 3



Теорема 3. Если усеченный спектр $\{\lambda_{0j} + \varepsilon\lambda_{1j}\}_1^n$ матрицы $A(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам $Re(\lambda_{0j} + \varepsilon\lambda_{1j}) \leq -\varepsilon\sigma_0 < 0$ ($j = \overline{1, n}$) и для достаточно гладкой вектор-функции $f(x, t)$ справедлива оценка

$$|f(x, t)| \leq C|x|^{1+\alpha} \quad (\alpha, C > 0, t \geq 0, |x| \leq R),$$

тогда тривиальное решение с/в квазилинейной задачи (6) асимптотически устойчиво.

Доказательство следует из дифференциального неравенства [11] для квадрата нормы решения эквивалентной задачи (7) ($N = 1$):

$$\begin{aligned} \frac{d|z|^2}{dt} &= 2\varepsilon^{-1}Re(z^*(\Lambda_0 + \varepsilon\Lambda_1)z) + O(\varepsilon)|z|^2 + 2Re(z^*b(z, t)) \leq \\ &\leq 2Re(\lambda_{0j}\varepsilon^{-1} + \lambda_{1j})|z|^2 + O(\varepsilon)|z|^2 + 2C_1|z|^{2+\alpha} \leq 2(-\sigma_1 + C_1|z|^\alpha)|z|^2 \leq \\ &\leq -2\sigma_2|z|^2 \quad (0 < \sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_0 < 1), \end{aligned}$$

что позволяет записать оценку $|z(t)| \leq |z^0|\exp(-\sigma_2 t)$ и завершает доказательство теоремы 3 (в частности, из этой оценки следует продолжительность решения на полуось $[0; +\infty)$, [14]).

Периодические матрицы. Теорема 4

Теорема 4. Если спектр $\{\lambda_{0j}(t)\}_1^n$ T -периодической матрицы $A_0(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\sigma_{jk}(t) \equiv \lambda_{0j}(t) - \lambda_{0k}(t) \neq 0 \quad (j, k = \overline{1, n}, j \neq k), \quad t \geq 0,$$

тогда с/в система (1) с помощью невырожденной при достаточно малых $0 < \varepsilon < 1$ гладкой T -периодической замены $x = S_{(N)}(t, \varepsilon)z$ может быть приведена к системе с почти диагональной матрицей:

$$\varepsilon \dot{z} = Q(t, \varepsilon)z + \varepsilon b(z, t, \varepsilon), \quad z(0, \varepsilon) = z^0, \quad b(0, t, \varepsilon) \equiv 0 \quad (9)$$

$$\left(Q(t, \varepsilon)z = \Lambda_{(N)}(t, \varepsilon)z + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \Lambda_{(N)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \Lambda_k(t) \varepsilon^k \right),$$

где матрицы $S_{(N)}(t, \varepsilon)$ и $\Lambda_k(t)$ определяются с помощью простого итерационного алгоритма.

Устойчивость и циклы. Теорема 5.

Теорема 5. Если в условиях теоремы 4 спектр $\lambda_j(t, \varepsilon)$ диагональной матрицы $(\Lambda_0(t) + \varepsilon\Lambda_1(t))$ удовлетворяет неравенствам

$$\operatorname{Re}\lambda_j(t, \varepsilon) \leq \varepsilon(-\sigma_0 + \varphi(t)) \quad \left(\sigma_0 > 0, \int_0^t \varphi(s)ds \leq C, \quad t \geq 0 \right)$$

и для достаточно гладкой функции имеет место оценка

$$|f(x, t)| \leq C|x|^{1+\alpha} \quad (\alpha, C > 0, t \geq 0, \quad |x| < R),$$

тогда тривиальное решение с/в задачи (10) и эквивалентной ей задачи (1) асимптотически устойчиво.

Следствие 1. Если в теореме 5 условие на функцию $f(x, t)$ заменить условием гладкости и ограниченности при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^n$, а также ее периодичности по t ($f(x, t + \tau) \equiv f(x, t)$), то система (1) имеет по крайней мере одно T -периодическое решение.

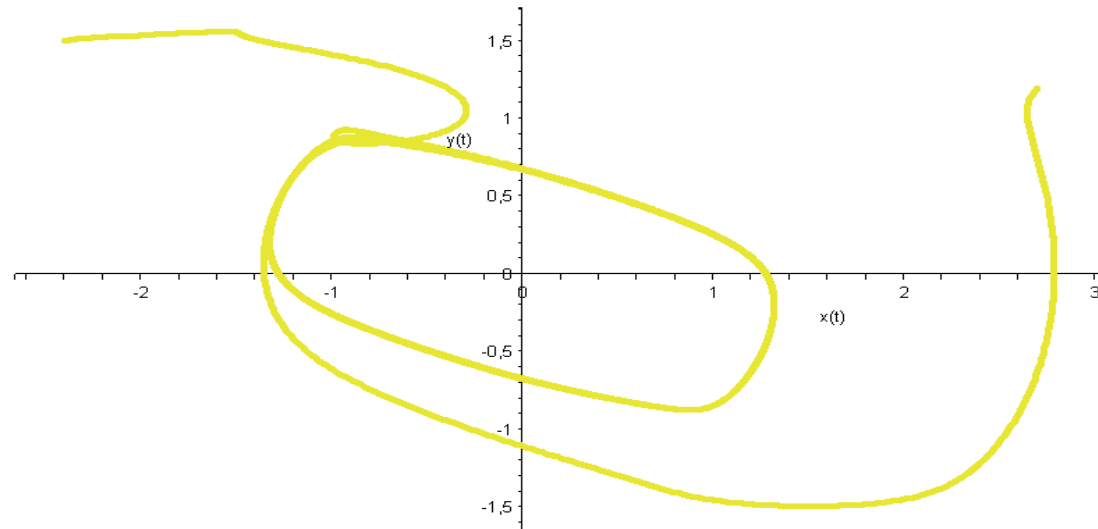
Доказательство следует из асимптотической устойчивости однородной системы (1) ($f \equiv 0$) и теоремы Брауэра о неподвижной точке.

Следующий рисунок представляет пример такого (устойчивого) периодического решения для двумерной системы.

Цикл периодической системы

```
phaseportrait([diff(x(t),t)=-  
x(t)+y(t)+5*cos(t)*sin(1+x(t)^2+y(t)^2),  
diff(y(t),t)=-x(t)-y(t)], [x,y],
```

```
t=0..100,[[x(0)=-2.4,y(0)=1.5],[x(0)=2.7,y(0)=1.2 ] ],
```



Пример 2. Модель сердцебиения

В работе Зимана [12] рассмотрена модель работы сердца

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = x - x^3 - y, \\ \dot{y} = x - x_0, \end{cases} \quad (11)$$

где x - относительная длина мышечного волокна, y отражает наличие электрохимического управления.

В случае $x_0 > 0$ система (10) имеет асимптотически устойчивую точку покоя $P_1(x_0, y_0)$, где $y_0 = x_0 - x_0^3$. (см. рис.1)

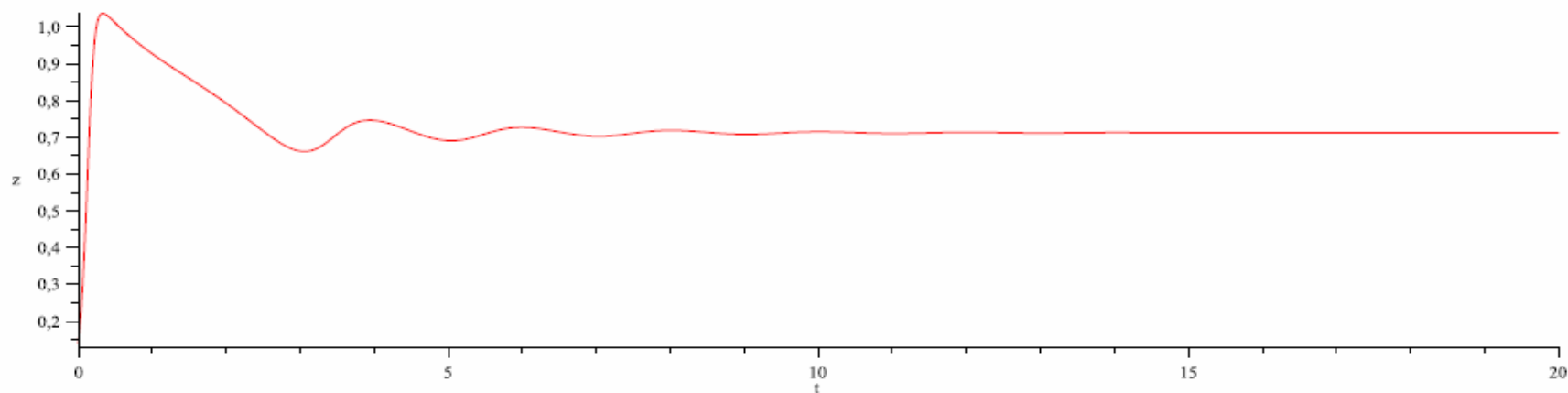


Рис. 1: График, соответствующий затухающим колебаниям решения системы (11) при $x_0 > \frac{1}{\sqrt{3}}$ ($z(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$, $\varepsilon = 0.1$).

Бифуркация Хопфа

После замены $x_1 = x - x_0$, $y_1 = y - y_0$, позволяющей перенести точку покоя в т. $O(0, 0)$, получим систему

$$\varepsilon \dot{z}_1 = B(\varepsilon)z_1 - h(z_1), \quad B(\varepsilon) = \begin{pmatrix} (1 - 3x_0^2) & -1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix},$$

$$h(z_1) = \begin{pmatrix} x_1^3 + 3x_1^2x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

и убедимся в асимптотической устойчивости ее тривиального решения при $x_0 > \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$ (в силу теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению), т.к. спектр

$$\lambda_{1,2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \varepsilon} \quad (b = 1 - 3x_0^2)$$

матрицы $B(\varepsilon)$ при $b = 1 - 3x_0^2 < 0$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ лежит в левой полуплоскости.

Легко проверить, что при $b = 1 - 3x_0^2 \geq 0$ в системе (11) возникает бифуркация Хопфа (см., например, [13]). Соответствующий предельный цикл системы (11) при $0 < x_0 < \frac{1}{\sqrt{3}}$ изображен на рис.2, 3.

Предельный цикл. Рисунок 2

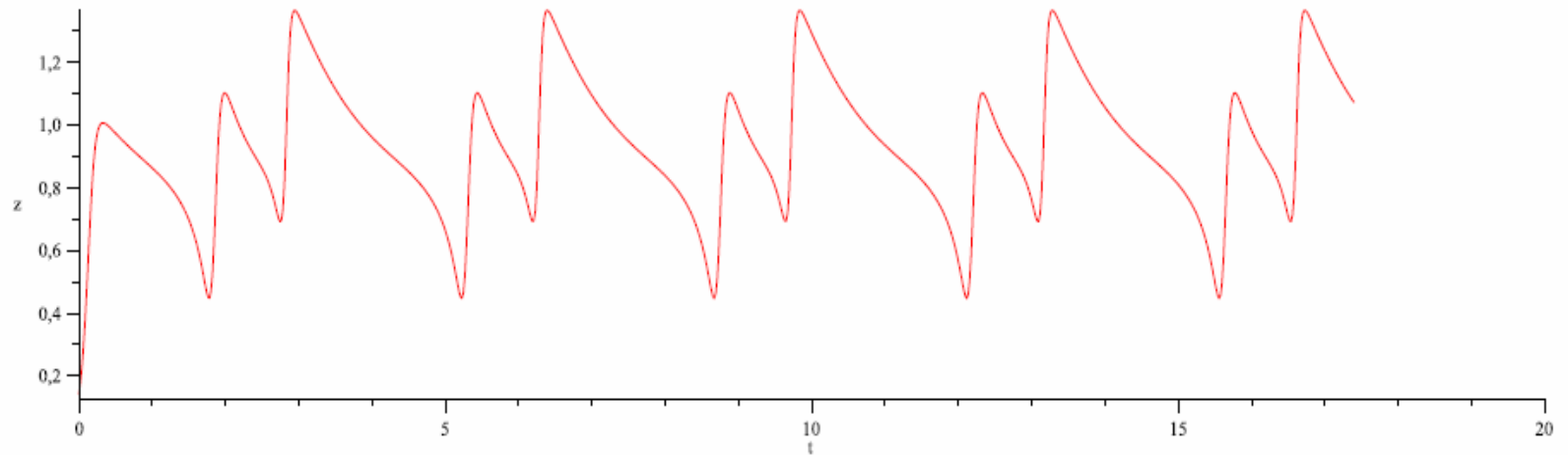


Рис. 2: Незатухающие "периодические" колебания модуля решения системы (11) при $0 < x_0 < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ($z(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$, $\varepsilon = 0.1$).

Предельный цикл. Рисунок 3

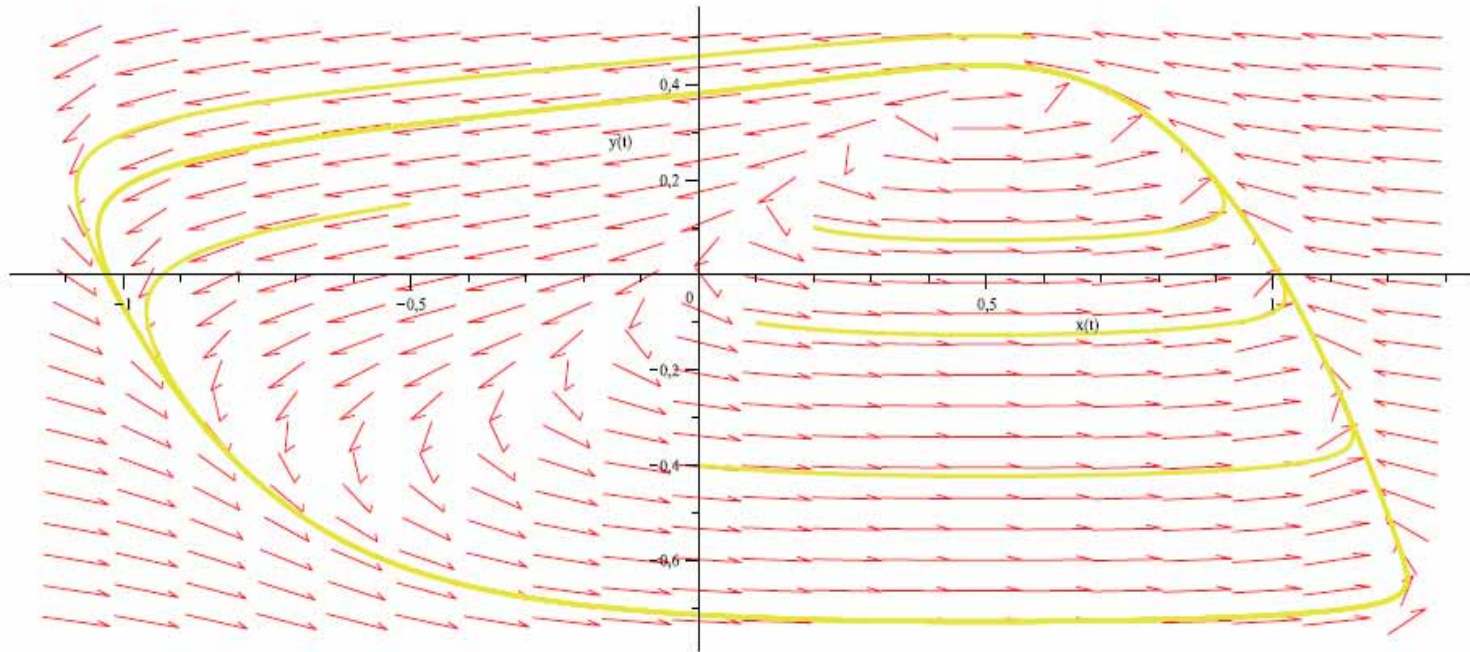


Рис. 3: Фазовый портрет динамической системы (11) при $0 < x_0 < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Видна структура предельного цикла ($\varepsilon = 0.1$).

Пример 3. Модель нервного импульса

Полученные результаты позволяют также изучить с/в модельную квазилинейную задачу о прохождении нервного импульса [1, с.202]

$$\varepsilon \dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + \varepsilon f(x), \quad x(0, \varepsilon) = x^0, \quad (12)$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} -3\varepsilon x_1^2 - \varepsilon x_1 x_2 - \varepsilon^2 x_1^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (где матрица } A_0 \text{ имеет полупростую структуру)}$$

В этом случае можно перейти к с/в системе с почти диагональной матрицей:

$$\varepsilon \dot{\nu} = (\Lambda_0 + \varepsilon \Lambda_1 + O(\varepsilon^2))\nu + \varepsilon h(\nu) \quad (13)$$

и с учетом теоремы 3 сделать вывод об асимптотической устойчивости решения с/в квазилинейной задачи (13) и эквивалентной ей задачи (12) в окрестности точки P_0 .

Процесс затухающих колебаний нервного импульса изображен на рис.4, а фазовый портрет системы (12) представлен на рис.5. Пограничный слой наблюдается при $0 < t \ll 1$ (рис.4).

Устойчивость. Рисунок 4

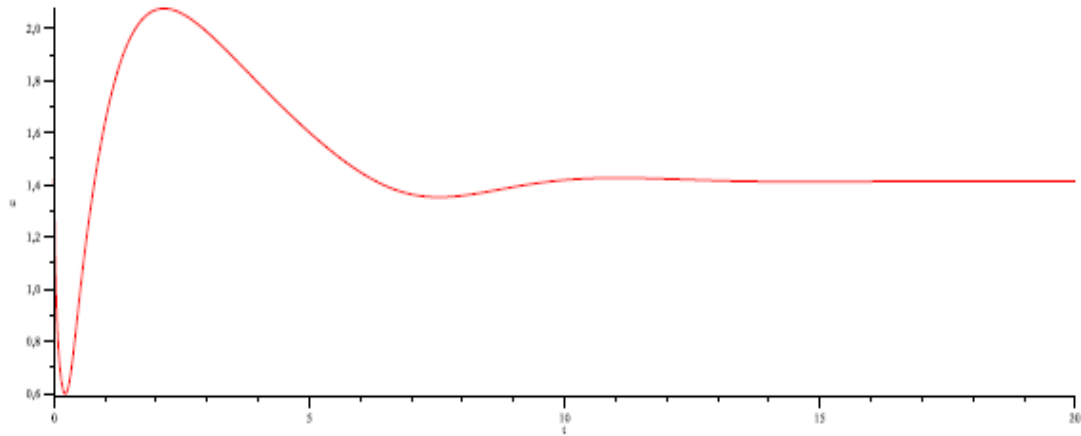


Рис. 4: Затухание первого импульса для динамической системы (12)
($u(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$, $\varepsilon = 0.1$).

Асимптотическая устойчивость. Рисунок 5

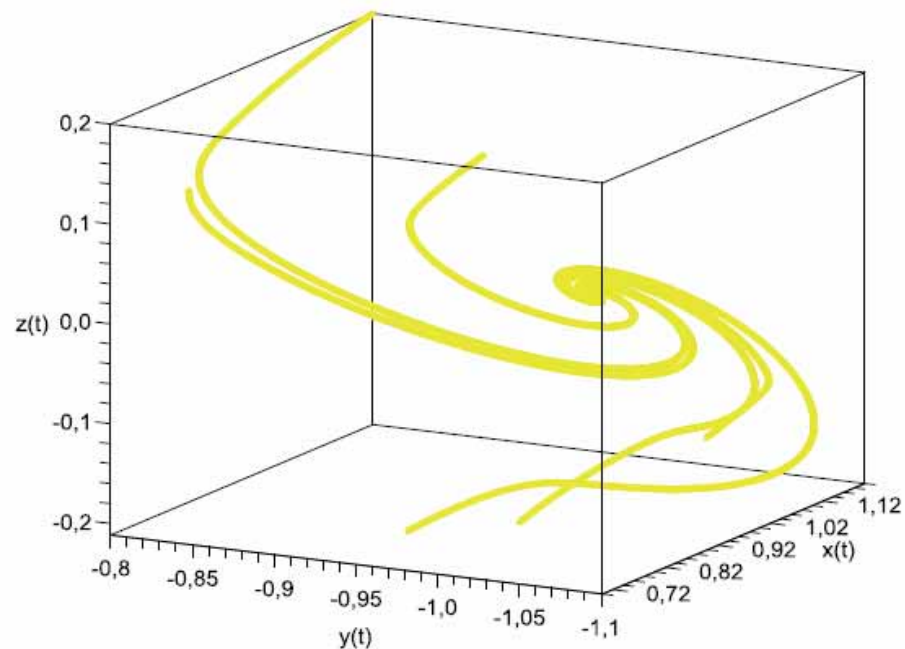



Рис. 5: Фазовый портрет динамической системы (12) ($\varepsilon = 0.1$).

Список литературы

- 
- [1] I. Arrowsmith D.K., Place C.M. Dynamical systems. Differential equations, maps and chaotic behavior. London. Chapman&Hall, 1992,330 p.
 - [2] Като Т. Теория возмущения линейных операторов. М.Мир, 1972, 740 с.
 - [3] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4. Анализ операторов. М.Мир, 1982,428 с.
 - [4] Ланкастер П. Теория матриц. М.Наука, 1978,280 с.
 - [5] Фридрихс К. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.Мир, 1969, 232 с.
 - [6] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., Наука, 1981, 400 с.
 - [7] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М. Высшая школа, 1990,208 с.
 - [8] Коняев Ю.А. Общий подход к асимптотическому интегрированию сингулярно возмущенных начальных и краевых задач для систем линейных ОДУ. Дифференциальные уравнения, 1984, т.20, N° 11, с.1999-2003.
 - [9] Коняев Ю.А. Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущения. Математический сборник, 1993,т.18, N° 12, с.133-144.

Список литературы

- [10] *Коняев Ю.А., Федоров Ю.С.* Асимптотический анализ некоторых классов сингулярно возмущенных задач на полуоси. Математические заметки, 1997. Т.62, вып. 1, с. 111-117.
- [11] *Коняев Ю.А.* Об одном методе исследования устойчивости и оценки нормы решения. Математические заметки, 2007, т.81, (вып. 4), с. 540-546.
- [12] *Zeeman E.C.* Differential Equations for the Heartbeat and Nerve Impulse. Salvador Symposium on Dynamical Systems. Academic Press, 1973. 683-741.
- [13] *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М., Мир, 1980, 368 с.
- [14] *Демидович.* Лекции по математической теории устойчивости. М., изд-во МГУ, 1998, 480 с.
- [15] *Chen X., Zhai G.* Modeling and analysis for oscillator networks. Proceeding of the 25th Lusted International Conference on IDENTIFICATION AND CONTROL, Lanzarote, Canary Islands, Spain, 2006, p.261-264.
- [16] *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. М., Наука, 1971, 288 с.