Анализ квазилинейных неавтономных систем с нормальной матрицей

Ю. А. Коняев, В. И. Безяев

Кафедра высшей математики
Кафедра дифференциальных уравнений
и математической физики

Российский университет дружбы народов

Дубна, ММСР 2009

Analysis of quasilinear nonautonomous systems with normal matrix

Yu.A. Konyaev and V.I. Bezyaev

Department of Mathematics and
Department of Differential Equations and Mathematical Physics

Peoples Friendship University of Russia

Dubna, MMCP 2009

Аннотация

Для некоторых классов квазилинейных неавтономных систем дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями даны точные формулы модуля решения задачи Коши, приведены конструктивные спектральные критерии устойчивости решений, доказаны теоремы, являющиеся аналогами теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению и принципа суперпозиции для квазилинейных систем.Приведены нетривиальные примеры. Полученные без использования аппарата функций Ляпунова результаты дополняют или уточняют ранее известное $[1-5]$.

Примеры 1 и 2

Примеры 1 и 2

- **Пример 1.** $\dot{x} = sgnt$.
  При $t < 0$ имеем $\dot{x} = -1$, решение выражается формулой $x = -t + c_1$;
  при $t > 0$ имеем $\dot{x} = 1$, решение: $x = t + c_2$.
  Исходя из требований непрерывности решения при $t = 0$, получаем

  $$x(0) = \lim_{t \to -0}(-t + c_1) = \lim_{t \to +0}(t + c_2), \quad x(0) = c_1 = c_2.$$

  Поэтому решение выражается формулой $x(t) = |t| + c$.
  При $t = 0$ производной $\dot{x}$ не существует.

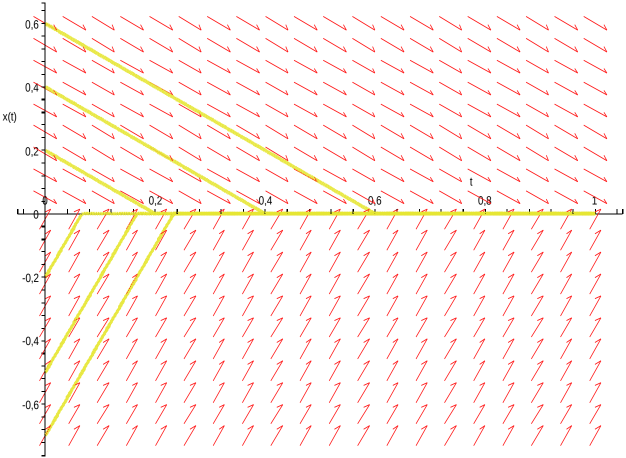
Примеры 1 и 2

- **Пример 1.** $\dot{x} = sgnt$.
  При $t < 0$ имеем $\dot{x} = -1$, решение выражается формулой $x = -t + c_1$;
  при $t > 0$ имеем $\dot{x} = 1$, решение: $x = t + c_2$.
  Исходя из требований непрерывности решения при $t = 0$, получаем

  $$x(0) = \lim_{t \to -0}(-t + c_1) = \lim_{t \to +0}(t + c_2), \quad x(0) = c_1 = c_2.$$

  Поэтому решение выражается формулой $x(t) = |t| + c$.
  При $t = 0$ производной $\dot{x}$ не существует.
- **Пример 2.** $\dot{x} = 1 - 2sgn\, x$.
  При $x < 0$ имеем $\dot{x} = 3$, решение $x(t) = 3t + c_1$; при $x > 0$ имеем $\dot{x} = -1$, решение $x(t) = -t + c_2$.

К примеру 2



Определение кусочно непрерывной функции

Вектор-функция $f(t,x)$ называется *кусочно непрерывной* в ограниченной области G $(n+1)$ -мерного пространства t, x, если область G равна объединению конечного семейства непересекающихся областей G_j $(j = 1, \dots, l)$, в каждой из которых функция f непрерывна вплоть до границы, и множества M меры нуль, состоящего из точек границ областей G_j $(j = 1, \dots, l)$. Функция *непрерывна* в области *вплоть до границы*, если при приближении к каждой точке границы она стремится к конечному пределу. Если область G бесконечна, то в определении кусочно непрерывной функции каждая ограниченная часть области G может иметь общие точки лишь с конечным семейством областей G_j.

Теорема устойчивости

Теорема

Теорема устойчивости

Теорема

- *Если для квазилинейной неавтономной системы*

$$\dot{x} = A(x,t)x, \quad x(0) = x^0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

с нормальной матрицей $A(x,t)$

$$(A(x,t)A^*(x,t) \equiv A^*(x,t)A(x,t), \quad |x| < \delta, \quad t \geqslant 0),$$

Теорема устойчивости

Теорема

- *Если для квазилинейной неавтономной системы*

$$\dot{x} = A(x,t)x, \quad x(0) = x^0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

с нормальной матрицей $A(x,t)$

$$(A(x,t)A^*(x,t) \equiv A^*(x,t)A(x,t), \quad |x| < \delta, \quad t \geqslant 0),$$

- *которая может иметь кусочно непрерывные элементы, ее спектр* $\{\lambda_j(x,t)\}_1^n$ *удовлетворяет тождествам*

$$Re\lambda_j(x,t) \equiv \sigma(x,t); \quad (j = \overline{1,n};\ |x| < \delta :\ t \geqslant 0,\ ), \tag{2}$$

Теорема устойчивости

Теорема

- *Если для квазилинейной неавтономной системы*

$$\dot{x} = A(x,t)x, \quad x(0) = x^0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

с нормальной матрицей $A(x,t)$

$$(A(x,t)A^*(x,t) \equiv A^*(x,t)A(x,t), \quad |x| < \delta, \quad t \geqslant 0),$$

- *которая может иметь кусочно непрерывные элементы, ее спектр* $\{\lambda_j(x,t)\}_1^n$ *удовлетворяет тождествам*

$$Re\lambda_j(x,t) \equiv \sigma(x,t); \quad (j = \overline{1,n};\ |x| < \delta :\ t \geqslant 0,\ ), \tag{2}$$

- *тогда при наличии оценки* $\sigma(x,t) \leqslant -\sigma_0 < 0;\ (|x| < \delta;\ t \geqslant 0)$ — *тривиальное решение асимптотически устойчиво, при* $\sigma(x,t) \leqslant 0\ (|x| < \delta;\ t \geqslant 0)$ — *устойчиво, а в случае* $\sigma(x,t) \geqslant \sigma_0 > 0;\ (|x| < \delta;\ t \geqslant 0)$ — *неустойчиво.*

Доказательство теоремы

Нормальная матрица $A(x,t)$ унитарно эквивалентна диагональной матрице [6] из ее собственных значений:

$$U^*(x,t)A(x,t)U(x,t) = \Lambda_A(x,t) = diag\{\lambda_1(x,t),\ldots,\lambda_n(x,t)\},$$

где $U(x,t)$ — унитарная матрица
$(\ U^*(x,t) * U(x,t) \equiv E;\ |x| < \delta;\ t \geqslant 0\ ).$
Для квадрата евклидовой нормы решения системы (1) имеет место [5] дифференциальное соотношение:
$\frac{1}{2}\frac{d|x|^2}{dt} = Re(x^* A(x,t)x)$, которое после унитарной подстановки $x = U(x,t)y$ в правую часть приобретает вид

Доказательство теоремы

$$\frac{1}{2}\frac{d|x|^2}{dt} = Re((y^* U^*(x,t)A(x,t)U(x,t)y) = Re(y^* \Lambda_A(x,t)y) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} Re\lambda_j(x,t)|y_j|^2 = \sigma(x,t)|x|^2.$$

При $\sigma(x,t) \leqslant -\sigma_0 < 0$ имеем
$\frac{d|x|^2}{dt} \leqslant -2\sigma_0|x^0|^2 \Rightarrow |x(t)| \leqslant |x| exp{-\sigma_0 t}$ асимптотически устойчивое решение, при $\frac{d|x|^2}{dt} \leqslant 0$ — устойчивое, а в случае $\frac{d|x|^2}{dt} \geqslant \sigma_0 > 0 \Rightarrow |x(t)| \geqslant |x^0| \exp \sigma_0 t$ — неустойчивое.
Замечание. Теорему 1 можно считать обобщением аналогичного результата для систем с постоянной матрицей.

Следствие 1

Следствие

Следствие 1

Следствие

- *Если в условии Теоремы 1*

$$Re\lambda_j(x,t) = -C|x|^{\alpha} \quad (C>0;\ |x|<\delta;\ t\geqslant 0;\ j=\overline{1,n}), \quad (3)$$

Следствие 1

Следствие

- *Если в условии Теоремы 1*

$$Re\lambda_j(x,t) = -C|x|^{\alpha} \quad (C > 0;\ |x| < \delta;\ t \geqslant 0;\ j = \overline{1,n}), \quad (3)$$

- *тогда норма решения системы (1) представима в виде* $(\alpha > 0)$

$$|x(t)| = (\alpha C t + |x^0|^{-\alpha})^{-1/\alpha} \quad (|x^0| \neq 0;\ t \geqslant 0), \qquad (4)$$

Следствие 1

Следствие

- *Если в условии Теоремы 1*

$$Re\lambda_j(x,t) = -C|x|^\alpha \quad (C > 0;\ |x| < \delta;\ t \geqslant 0;\ j = \overline{1,n}), \quad (3)$$

- *тогда норма решения системы (1) представима в виде* $(\alpha > 0)$

$$|x(t)| = (\alpha Ct + |x^0|^{-\alpha})^{-1/\alpha} \quad (|x^0| \neq 0;\ t \geqslant 0), \quad (4)$$

- *и при* $\alpha = 0$

$$|x(t)| = |x^0| \exp(-Ct), \quad (5)$$

т.е. решение продолжаемо и асимптотически устойчиво.

Следствие и пример 1

Следствие

Следствие и пример 1

Следствие

- *При условии*

$$Re\lambda_j(x,t) = C|x|^{\alpha}; \quad (j=\overline{1,n};\ |x|<\delta;\ t\geqslant 0;\ \alpha\geqslant 0;\ C>0)$$

тривиальное решение неустойчиво.

Следствие и пример 1

Следствие

- *При условии*

  $$Re\lambda_j(x,t) = C|x|^\alpha; \quad (j = \overline{1,n};\ |x| < \delta;\ t \geqslant 0;\ \alpha \geqslant 0;\ C > 0)$$

  тривиальное решение неустойчиво.

- **Пример 1.** *Решение системы*

  $$\dot{x} = \begin{pmatrix} -|x|^2 & sgn(1 + x_1x_2)\cos t \\ -sgn(1 + x_1x_2)\cos t & -|x|^2 \end{pmatrix} x$$

  с нормальной матрицей асимптотически устойчиво в силу следствия 1, так как для ее спектра выполняются условия $Re\lambda_j(x,t) \equiv -|x|^2 \quad (j = 1,2)$*, при этом модуль точного решения определяется равенством*
  $|x(t)| = 1/\sqrt{t + |x^0|^{-2}} \to 0 \quad (t \to +\infty).$

Следствие 2

Следствие

Следствие 2

Следствие

- *Если в условии теоремы 1*

$$Re\lambda_j(x,t) = \varphi(t); \quad (j = \overline{1,n};\ |x| < \delta;\ t \geqslant 0), \tag{6}$$

Следствие 2

Следствие

- *Если в условии теоремы 1*

$$Re\lambda_j(x,t) = \varphi(t); \quad (j = \overline{1,n};\ |x| < \delta;\ t \geqslant 0), \qquad (6)$$

- *тогда норма решения системы (1) представима в виде*

$$|x(t)| = |x^0| \exp\left(b(t)\right); \quad b(t) = \int_0^t \varphi(s)ds \qquad (7)$$

Следствие 2

Следствие

- *Если в условии теоремы 1*

$$Re\lambda_j(x,t) = \varphi(t); \quad (j = \overline{1,n};\ |x| < \delta;\ t \geqslant 0), \qquad (6)$$

- *тогда норма решения системы (1) представима в виде*

$$|x(t)| = |x^0| \exp\left(b(t)\right); \quad b(t) = \int_0^t \varphi(s)ds \qquad (7)$$

- *и определяет асимптотически устойчивое решение при* $b(t) \to -\infty$ $(t \to +\infty)$, *устойчивое при* $b(t) \leqslant C$ $(t \geqslant 0)$ *и неустойчивое в случае* $b(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$.

Следствие 2

Следствие

- *Если в условии теоремы 1*

$$Re\lambda_j(x,t) = \varphi(t); \quad (j = \overline{1,n};\ |x| < \delta;\ t \geqslant 0), \qquad (6)$$

- *тогда норма решения системы (1) представима в виде*

$$|x(t)| = |x^0| \exp\left(b(t)\right); \quad b(t) = \int_0^t \varphi(s)ds \qquad (7)$$

- *и определяет асимптотически устойчивое решение при* $b(t) \to -\infty$ $(t \to +\infty)$, *устойчивое при* $b(t) \leqslant C$ $(t \geqslant 0)$ *и неустойчивое в случае* $b(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$.
- *Доказательство следует из дифференциального уравнения* $\frac{1}{2}\frac{d|x|^2}{dt} = \varphi(t)|x|^2$ *и его решения (7).*

Примеры 2 и 3

Примеры 2 и 3

- **Пример 2.** Решение системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+t} & sgn(1 + x_1 x_2)\cos t \\ -sgn(1 + x_1 x_2)\cos t & -\frac{1}{1+t} \end{pmatrix} x$$

с нормальной матрицей асимптотически устойчиво в силу следствия 2, так как ее спектр удовлетворяет равенству $Re\lambda_j(x,t) \equiv -\frac{1}{1+t} \quad (j = 1, 2)$, и при этом $|x(t)| = |x^0| \ln(\frac{1}{1+t}) \to -\infty \quad (t \to +\infty)$.

Примеры 2 и 3

- **Пример 2.** Решение системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+t} & sgn(1+x_1x_2)\cos t \\ -sgn(1+x_1x_2)\cos t & -\frac{1}{1+t} \end{pmatrix} x$$

  с нормальной матрицей асимптотически устойчиво в силу следствия 2, так как ее спектр удовлетворяет равенству $Re\lambda_j(x,t) \equiv -\frac{1}{1+t} \quad (j=1,2)$, и при этом $|x(t)| = |x^0| \ln(\frac{1}{1+t}) \to -\infty \quad (t \to +\infty)$.

- **Пример 3.** Решение системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} (1+\cos t) & t^2 sgn(1+x+y) \\ -t^2 sgn(1+x+y) & (1+\cos t) \end{pmatrix} x$$

  с нормальной матрицей неустойчиво, так как $Re\lambda_j = 1+\cos t$ и $|x(t)| = |x^0| \exp(t+\sin t) \to +\infty \quad (t \to +\infty)$.

Следствие 3

Следствие

Следствие 3

Следствие

- *Если в условии теоремы 1*

$$Re\lambda_j(x,t) = -\varphi(t)|x|^{\alpha}; \quad (j=\overline{1,n};\ \alpha \geqslant 0;\ |x|<\delta;\ t \geqslant 0), \tag{8}$$

Следствие 3

Следствие

- *Если в условии теоремы 1*

$$Re\lambda_j(x,t) = -\varphi(t)|x|^{\alpha}; \quad (j = \overline{1,n};\ \alpha \geqslant 0;\ |x| < \delta;\ t \geqslant 0), \tag{8}$$

- *тогда норма решения системы (1) представима в виде* $(\alpha > 0)$

$$|x(t)| = (\alpha b(t) + |x^0|^{-\alpha})^{-1/\alpha} \tag{9}$$

Следствие 3

Следствие

- *Если в условии теоремы 1*

$$Re\lambda_j(x,t) = -\varphi(t)|x|^{\alpha}; \quad (j=\overline{1,n};\ \alpha \geqslant 0;\ |x|<\delta;\ t \geqslant 0), \tag{8}$$

- *тогда норма решения системы (1) представима в виде* $(\alpha > 0)$

$$|x(t)| = (\alpha b(t) + |x^0|^{-\alpha})^{-1/\alpha} \tag{9}$$

- *и при* $\alpha = 0$

$$|x(t)| = |x^0| \exp\left(b(t)\right); \quad b(t) = \int_0^t \varphi(s) ds \tag{10}$$

Следствие 4

Следствие

Следствие 4

Следствие

- *Если в условиях теоремы 1*

$$-\varphi_2(t)|x|^\alpha \leqslant Re\lambda_j(x,t) \leqslant -\varphi_1(t)|x|^\alpha$$

$$(j=\overline{1,n}; \quad \varphi_2(t)>\varphi_1(t); \quad \alpha \geqslant 0; \; |x|<\delta; \quad t \geqslant 0),$$

Следствие 4

Следствие

- *Если в условиях теоремы 1*

$$-\varphi_2(t)|x|^\alpha \leqslant Re\lambda_j(x,t) \leqslant -\varphi_1(t)|x|^\alpha$$

$$(j=\overline{1,n};\quad \varphi_2(t)>\varphi_1(t);\quad \alpha\geqslant 0;\ |x|<\delta;\quad t\geqslant 0),$$

- *тогда для модуля решения системы (1) справедлива оценка*

$$(\alpha b_2(t)+|x^0|^{-\alpha})^{-1/\alpha} \leqslant |x(t)| \leqslant (\alpha b_1(t)+|x^0|^{-\alpha})^{-1/\alpha}(\alpha>0)$$

Следствие 4

Следствие

- *Если в условиях теоремы 1*

$$-\varphi_2(t)|x|^\alpha \leqslant Re\lambda_j(x,t) \leqslant -\varphi_1(t)|x|^\alpha$$

$$(j=\overline{1,n}; \quad \varphi_2(t)>\varphi_1(t); \quad \alpha \geqslant 0; \ |x|<\delta; \quad t\geqslant 0),$$

- *тогда для модуля решения системы (1) справедлива оценка*

$$(\alpha b_2(t)+|x^0|^{-\alpha})^{-1/\alpha} \leqslant |x(t)| \leqslant (\alpha b_1(t)+|x^0|^{-\alpha})^{-1/\alpha} (\alpha>0)$$

- *или* $|x^0|\exp\left(b_2(t)\right) \leqslant x(t) \leqslant |x^0|\exp\left(-b_1(t)\right) (\alpha=0);$

$$b_j=\int_0^t \varphi_j(s)ds \quad (j=1,2).$$

Теорема 2

Теорема

Теорема 2

Теорема

- *Если для квазилинейной неавтономной неоднородной системы*

$$\dot{x} = (A(x,t)+f(x,t)); x(0) = x^0; f(0,t) \equiv 0; x, f \in R^n, \quad (11)$$

Теорема 2

Теорема

- *Если для квазилинейной неавтономной неоднородной системы*

$$\dot{x} = (A(x,t)+f(x,t)); x(0) = x^0; f(0,t) \equiv 0; x, f \in R^n, \quad (11)$$

- *где нормальная матрица $A(x,t)$ и вектор-функция $f(x,t)$ могут иметь кусочно непрерывные коэффициенты, существует изолированное тривиальное решение $x \equiv 0$, спектр $\{\lambda_j(x,t)\}_1^n$ матрицы $A(x,t)$ удовлетворяет соотношениям $Re\lambda_j(x,t) \leqslant -C_1|x|^\alpha$;*

$$(C_1 > 0;\ \alpha \geqslant 0;\ t \geqslant 0;\ j = \overline{1,n};\ |x| < \delta < 1)$$

Теорема 2

Теорема

- *Если для квазилинейной неавтономной неоднородной системы*

$$\dot{x} = (A(x,t)+f(x,t)); x(0) = x^0; f(0,t) \equiv 0; x, f \in R^n, \quad (11)$$

- *где нормальная матрица* $A(x,t)$ *и вектор-функция* $f(x,t)$ *могут иметь кусочно непрерывные коэффициенты, существует изолированное тривиальное решение* $x \equiv 0$, *спектр* $\{\lambda_j(x,t)\}_1^n$ *матрицы* $A(x,t)$ *удовлетворяет соотношениям* $Re\lambda_j(x,t) \leqslant -C_1|x|^{\alpha}$;

$$(C_1 > 0;\ \alpha \geqslant 0;\ t \geqslant 0;\ j = \overline{1,n};\ |x| < \delta < 1)$$

- *и для функции* $f(x,t)$ *справедлива оценка* $|f(x,t)| \leqslant C_2|x|^{1+\beta}\ (C_2 > 0;\ \beta > \alpha \geqslant 0;\ |x| < \delta < 1;\ t \geqslant 0)$,

Теорема 2

Теорема

- *Если для квазилинейной неавтономной неоднородной системы*

$$\dot{x} = (A(x,t) + f(x,t));\, x(0) = x^0;\, f(0,t) \equiv 0;\, x, f \in R^n, \quad (11)$$

- *где нормальная матрица* $A(x,t)$ *и вектор-функция* $f(x,t)$ *могут иметь кусочно непрерывные коэффициенты, существует изолированное тривиальное решение* $x \equiv 0$, *спектр* $\{\lambda_j(x,t)\}_1^n$ *матрицы* $A(x,t)$ *удовлетворяет соотношениям* $Re\lambda_j(x,t) \leqslant -C_1|x|^\alpha$;

$$(C_1 > 0;\ \alpha \geqslant 0;\ t \geqslant 0;\ j = \overline{1,n};\ |x| < \delta < 1)$$

- *и для функции* $f(x,t)$ *справедлива оценка* $|f(x,t)| \leqslant C_2|x|^{1+\beta}\,(C_2 > 0;\ \beta > \alpha \geqslant 0;\ |x| < \delta < 1;\ t \geqslant 0)$,
- *тогда тривиальное решение системы (11) асимптотически устойчиво.*

Теорема 3

Предположение о нормальности матрицы системы может быть ослаблено

Теорема

Теорема 3

Предположение о нормальности матрицы системы может быть ослаблено

Теорема

- *если для квазилинейной системы*

$$\dot{x} = (A(x,t) + B(x,t))x; \quad x(0) = x^0, \tag{12}$$

Теорема 3

Предположение о нормальности матрицы системы может быть ослаблено

Теорема

- *если для квазилинейной системы*

$$\dot{x} = (A(x,t) + B(x,t))x; \quad x(0) = x^0, \tag{12}$$

- *где нормальная матрица* $A(x,t)$ *и матрица* $B(x,t)$ *могут иметь кусочно непрерывные коэффициенты, спектр* $\{\lambda_j(x,t)\}_1^n$ *матрицы* $A(x,t)$ *удовлетворяет неравенствам* $Re\lambda_j(x,t) \leqslant -C_1|x|^\alpha$, $(j = \overline{1,n};\ C_1 > 0;\ \alpha \geqslant 0;\ |x| < \delta < 1;\ t \geqslant 0)$,

Теорема 3

Предположение о нормальности матрицы системы может быть ослаблено

Теорема

- *если для квазилинейной системы*

$$\dot{x} = (A(x,t) + B(x,t))x; \quad x(0) = x^0, \tag{12}$$

- *где нормальная матрица* $A(x,t)$ *и матрица* $B(x,t)$ *могут иметь кусочно непрерывные коэффициенты, спектр* $\{\lambda_j(x,t)\}_1^n$ *матрицы* $A(x,t)$ *удовлетворяет неравенствам* $Re\lambda_j(x,t) \leqslant -C_1|x|^\alpha$, $(j = \overline{1,n};\ C_1 > 0;\ \alpha \geqslant 0;\ |x| < \delta < 1;\ t \geqslant 0)$,
- *а для матрицы* $B(x,t)$ *справедлива оценка*

$$||B(x,t)|| \leqslant C_2|x|^\beta, \quad (C_2 > 0; \beta > \alpha \geqslant 0; |x| < \delta < 1; t \geqslant 0),$$

Теорема 3

Предположение о нормальности матрицы системы может быть ослаблено

Теорема

- *если для квазилинейной системы*

$$\dot{x} = (A(x,t) + B(x,t))x; \quad x(0) = x^0, \tag{12}$$

- *где нормальная матрица* $A(x,t)$ *и матрица* $B(x,t)$ *могут иметь кусочно непрерывные коэффициенты, спектр* $\{\lambda_j(x,t)\}_1^n$ *матрицы* $A(x,t)$ *удовлетворяет неравенствам* $Re\lambda_j(x,t) \leqslant -C_1|x|^\alpha$, $(j = \overline{1,n};\ C_1 > 0;\ \alpha \geqslant 0;\ |x| < \delta < 1;\ t \geqslant 0)$,
- *а для матрицы* $B(x,t)$ *справедлива оценка*

$$||B(x,t)|| \leqslant C_2|x|^\beta, \quad (C_2 > 0; \beta > \alpha \geqslant 0; |x| < \delta < 1; t \geqslant 0),$$

- *тогда тривиальное решение системы* (12) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 4

Теорема

Теорема 4

Теорема

- *Если для квазилинейной неавтономной системы*

$$\dot{x} = (A(x,t) + B(x,t))x; \quad x(0) = x^0; \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{13}$$

Теорема 4

Теорема

- *Если для квазилинейной неавтономной системы*

$$\dot{x} = (A(x,t) + B(x,t))x; \quad x(0) = x^0; \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{13}$$

- *с нормальными матрицами* $A(x,t)$ *и* $B(x,t)$, *которые могут иметь кусочно непрерывные элементы, и их спектр удовлетворяет тождествам*

$$Re\lambda_{Aj}(x,t) \equiv \sigma_A(x,t), \quad (j = \overline{1,n};\ |x| < \delta;\ t \geqslant 0)$$

$$Re\lambda_{Bj}(x,t) \equiv \sigma_B(x,t), \quad (j = \overline{1,n};\ |x| < \delta;\ t \geqslant 0),$$

Теорема 4

Теорема

Теорема 4

Теорема

- *тогда при условии*

$$\sigma(x,t) \equiv \sigma_A(x,t)+\sigma_B(x,t) \leqslant -\sigma_0 < 0(|x| < \delta, t \geqslant 0) \quad (14)$$

тривиальное решение системы (13) *асимптотически устойчиво,*

Теорема 4

Теорема

- *тогда при условии*

$$\sigma(x,t) \equiv \sigma_A(x,t) + \sigma_B(x,t) \leqslant -\sigma_0 < 0 (|x| < \delta, t \geqslant 0) \quad (14)$$

тривиальное решение системы (13) асимптотически устойчиво,

- *при*

$$\sigma(x,t) \leqslant 0 \quad (|x| < \delta, \ t \geqslant 0) \quad (15)$$

— *устойчиво,*

Теорема 4

Теорема

- *тогда при условии*

$$\sigma(x,t) \equiv \sigma_A(x,t)+\sigma_B(x,t) \leqslant -\sigma_0 < 0(|x| < \delta,\, t \geqslant 0) \quad (14)$$

тривиальное решение системы (13) *асимптотически устойчиво,*

- *при*

$$\sigma(x,t) \leqslant 0 \quad (|x| < \delta,\; t \geqslant 0) \quad (15)$$

— устойчиво,

- *а в случае*

$$\sigma(x,t) \geqslant \sigma_0 > 0 \quad (|x| < \delta,\; t \geqslant 0) \quad (16)$$

— неустойчиво.

Замечания

Замечания

Замечания

Замечания

- *1. Теорема 4 имеет место и в случае, когда матрица системы равна сумме конечного числа нормальных матриц, т.е*

$$A(x,t) = \sum_{j=1}^{N} A_j(x,t).$$

Замечания

Замечания

- *1. Теорема 4 имеет место и в случае, когда матрица системы равна сумме конечного числа нормальных матриц, т.е*

$$A(x,t) = \sum_{j=1}^{N} A_j(x,t).$$

- *2. Тривиальное решение систем вида (13) всегда устойчиво, если матрицы $A(x,t)$ и $B(x,t)$ косоэрмитовы, или кососимметрические, так как являясь нормальными, они имеют чисто мнимый спектр.*
- *3. Для системы вида (13) имеют место аналоги следствий $1 - 4$.*

Пример 4

Пример 4

- Решение системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} (-1+\cos t) & t^2 sgn(x_1x_2+1) \\ -t^2 sgn(x_1x_2+1) & (-1+\cos t) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t^2} & sgn(x_1x_2) \\ -sgn(x_1x_2) & \frac{1}{1+t^2} \end{pmatrix} x$$

Пример 4

- Решение системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} (-1+\cos t) & t^2 sgn(x_1 x_2 + 1) \\ -t^2 sgn(x_1 x_2 + 1) & (-1+\cos t) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t^2} & sgn(x_1 x_2) \\ -sgn(x_1 x_2) & \frac{1}{1+t^2} \end{pmatrix} x$$

- асимптотически устойчиво , так как

$$b(t) = \int_0^t (-1+\cos s + \frac{1}{1+s^2}) ds = -t + \sin t + \operatorname{arctg} t \to -\infty$$

$$(t \to \infty)$$

Список литературы

1.Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., Наука, 1967, 472 с.

2.Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., Наука, 1985, 224 с.

3.Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М., Наука, 1971, 302 с.

4.Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. М., Наука, 1971, 288 с.

5.Коняев Ю.А. Метод унитарных преобразований в теории устойчивости. Изв. ВУЗ. Математика, 2002, №2, с.41-45.